

Quetzal
Integrador

Temas a Evaluar

Seis técnicas explicadas desde cero, diez ejemplos resueltos y consejos para prepararte para el Quetzal Integrador

Comité Organizador del Quetzal Integrador

Sede: Liceo Dr. Ricardo Bressani · Cobán, Alta Verapaz, Guatemala · 2026

Resumen. Este documento presenta el temario del *Quetzal Integrador*, competencia guatemalteca de cálculo integral. Son seis técnicas: cuatro principales (antiderivadas elementales, sustitución u, integración por partes y sustitución trigonométrica) y dos técnicas extra para integrales definidas (la propiedad del rey y las funciones pares e impares), que aparecerán pocas veces en el examen. Cada técnica se explica en una página, con ideas intuitivas y sin suponer conocimientos avanzados. Después se resuelven, paso a paso, diez ejemplos, y al final hay recomendaciones para prepararse. Se recomienda complementar esta guía con práctica por cuenta propia.

Palabras clave: antiderivada, sustitución, integración por partes, sustitución trigonométrica, propiedad del rey, paridad, integral definida.

El objetivo de la competencia es el aprendizaje. En esta primera edición queremos impulsar el interés por las competencias de integración en Guatemala. **Aunque no estés avanzado en el tema, puedes participar satisfactoriamente:** todo lo que necesitas está explicado en esta guía, desde cero.

PARTE I · LAS TÉCNICAS

1 Antiderivadas elementales 2
Integrales definidas: cómo se evalúan 3
2 Sustitución u 4
3 Integración por partes 5
4 Sustitución trigonométrica 6
5 Técnicas extra: rey y paridad 7

PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS

Técnicas 1, 2 y 3 8
Técnicas 4 y 5 11

PARTE III · PARA PREPARARTE

6 Recomendaciones 13

«Derivar es una técnica; integrar es un arte.» $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

PARTE I · LAS TÉCNICAS

1 Antiderivadas elementales

Integrar es derivar al revés. La derivada de x^2 es $2x$; por eso, una integral de $2x$ es x^2. Ante cualquier integral, la pregunta es siempre la misma: *¿qué función, al derivarla, me da esto?*

¿Y la $+C$? La derivada de un número es 0, así que x^2+5 y x^2-3 también tienen derivada $2x$. Por eso se escribe $+C$, que significa «más cualquier constante». En la competencia *no es necesario* escribirla.

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \quad \text{significa que} \quad F'(x)=f(x), \qquad \int \big[a\,f+b\,g\big]dx = a\int f\,dx + b\int g\,dx.$$

La segunda fórmula dice que las sumas se integran *término por término* y que los números que multiplican se pueden sacar de la integral.

Las integrales esenciales

No hace falta memorizar tablas enormes. Con estas ocho se resuelve casi todo; las demás se deducen de ellas con las técnicas de las páginas siguientes.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C$$

$$\int e^x\,dx = e^x+C \qquad \int \sec^2 x\,dx = \tan x+C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x+C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x+C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x+C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x+C$$

La regla de la potencia, en palabras: súmale 1 al exponente y divide entre el nuevo exponente. Por ejemplo, $\int x^3dx = \frac{x^4}{4}+C$ y $\int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}+C = -\frac{1}{x}+C$.

Antes de integrar, transforma la expresión

Muchas integrales no se resuelven «tal como vienen»: hay que modificarlas un poco hasta que aparezcan las esenciales. Los cambios más útiles son:

- **Dividir y separar.** $\dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{x^2}{x}+\dfrac{1}{x} = x+\dfrac{1}{x}$, así que $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}+\ln|x|+C$.
- **Escribir raíces y fracciones como potencias.** $\sqrt{x}=x^{1/2}$ y $\dfrac{1}{x^3}=x^{-3}$; después se usa la regla de la potencia.
- **Racionalizar.** Multiplicar arriba y abajo por el conjugado puede quitar una raíz del denominador: $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(x+1)-x} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ (ejemplo 1.2).

Cuidado. No existe una regla directa para productos: $\int f\,g\,dx$ *no* es $\int f\,dx\cdot\int g\,dx$. Y toda respuesta se puede comprobar en segundos: *deriva tu resultado y debes obtener lo que estaba dentro de la integral.*

PARTE I · HERRAMIENTA PARA TODAS LAS TÉCNICAS

$\int_a^b$ Integrales definidas: cómo se evalúan

Una integral *indefinida* da una función (con su $+C$). Una integral *definida*, la que tiene números arriba y abajo, da un **número**: el área entre la gráfica y el eje x, desde $x = a$ hasta $x = b$ (las partes bajo el eje cuentan como negativas). Se calcula con la antiderivada:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \qquad \text{«evalúa arriba, evalúa abajo y resta».}$$

Paso a paso

1. **Halla la antiderivada** $F(x)$ con la técnica que corresponda. Aquí no se escribe $+C$: se cancelaría al restar.
2. **Escríbela entre corchetes** con los límites: $\big[F(x)\big]_a^b$.
3. **Sustituye el número de arriba, luego el de abajo, y resta**, cada uno en su propio paréntesis:

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x + 2x)\,dx = \Big[\operatorname{sen} x + x^2\Big]_0^{\pi/2} = \underbrace{\left(\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi^2}{4}\right)}_{\text{arriba: } x=\pi/2} - \underbrace{\left(\operatorname{sen} 0 + 0^2\right)}_{\text{abajo: } x=0} = 1 + \frac{\pi^2}{4}.$$

El paréntesis de abajo *no siempre* vale 0: en $\int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = e - 1$, porque $e^0 = 1$. Por eso se escriben siempre las dos evaluaciones. Valores que conviene tener a mano:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe

Otros valores frecuentes

$e^0 = 1$, $\quad \ln 1 = 0$, $\quad \ln e = 1$

$\arctan 0 = 0$, $\quad \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{arc\,sen} 0 = 0$, $\quad \operatorname{arc\,sen} 1 = \frac{\pi}{2}$

Si usas una sustitución, cambia también los límites

Los números a y b son valores de x. Si cambias x por una nueva variable u, hay dos caminos correctos. Con $\int_0^1 2x\,(x^2+1)^3\,dx$ y $u = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$:

- **Camino 1: cambiar los límites.** Si $x = 0$, $u = 1$; si $x = 1$, $u = 2$. Todo queda en u y ya no se regresa a x: $\displaystyle\int_1^2 u^3\,du = \Big[\frac{u^4}{4}\Big]_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$.
- **Camino 2: regresar a x.** Se resuelve sin límites, se regresa a x y se usan los límites originales: $\Big[\dfrac{(x^2+1)^4}{4}\Big]_0^1 = \dfrac{16}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{15}{4}$.

Regla de oro. Los límites deben estar en la misma variable que el diferencial: límites de x con dx, de u con du. Mezclarlos es el error más común.

PARTE I · LAS TÉCNICAS

2 Sustitución u

La idea. Algunas integrales tienen una parte «de adentro» y, multiplicando afuera, la derivada de esa parte. En ese caso se le pone un nombre a la parte de adentro, u, y la integral se convierte en una mucho más sencilla. Es la regla de la cadena, leída al revés.

$$\int f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \qquad \text{con } u = g(x) \quad \text{y} \quad du = g'(x)\,dx.$$

Ejemplo rápido. En $\int 2x\cos(x^2)\,dx$, lo de adentro es x^2 y su derivada, $2x$, está afuera. Con $u = x^2$ y $du = 2x\,dx$:

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C = \operatorname{sen}(x^2) + C.$$

Procedimiento

1. **Elige** u: lo que está dentro de una raíz, de un paréntesis elevado a una potencia, de un exponente o en un denominador.
2. **Calcula** du derivando u, y compara con lo que tienes en la integral.
3. **Reescribe todo en** u: no debe quedar ninguna x ni ningún dx.
4. **Integra** con las esenciales y **regresa a** x al final.

Si falta un número, se compensa. En $\int x\,e^{x^2}dx$, con $u = x^2$ se tiene $du = 2x\,dx$, es decir, $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$. Entonces la integral es $\frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$. Solo se pueden compensar *números*; si falta algo con x, hay que probar otra u.

Así se deducen integrales que no están en la tabla esencial. Por ejemplo, $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$: con $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$, y queda $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|\cos x| + C$.

Tres patrones que conviene reconocer al instante (todos son sustituciones con $u = f(x)$):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int f(x)^n f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C, \qquad \int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C.$$

PARTE I · LAS TÉCNICAS

3 Integración por partes

¿Cuándo se usa? Cuando se multiplican dos funciones de *tipos distintos*, como $x\,e^x$ o $x\cos x$, o cuando hay un $\ln x$ solo. La fórmula viene de la regla del producto para derivar:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \text{y, con límites,} \qquad \int_a^b u\,dv = \Big[\,uv\,\Big]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

La idea. El producto se reparte en dos partes: u, que se *deriva*, y dv, que se *integra*. La fórmula cambia la integral original por otra, $\int v\,du$, que debe ser más fácil. Si sale más difícil, hay que intercambiar los papeles.

¿Cuál es u? La regla LIATE. Toma como u la función que aparezca primero en esta lista: **L**ogarítmicas, **I**nversas trigonométricas, **A**lgebraicas (x, x^2…), **T**rigonométricas, **E**xponenciales. Lo demás es dv.

Ejemplo. En $\int x\cos x\,dx$: $u = x$ (algebraica) y $dv = \cos x\,dx$, así que $du = dx$ y $v = \operatorname{sen} x$:

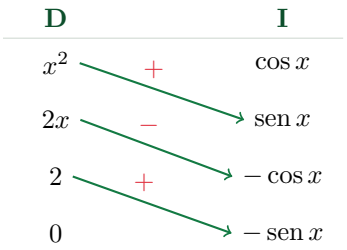
$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

Caso especial: un solo factor. Si solo hay $\ln x$, se toma $u = \ln x$ y $dv = dx$: $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$ (ejemplo 3.2).

Atajo: el método de la tabla

Cuando hay un *polinomio* multiplicado por e^x, $\operatorname{sen} x$ o $\cos x$, la tabla hace todas las rondas de partes de una vez. Se ilustra con $\int x^2\cos x\,dx$:

1. **Columna D:** el polinomio, derivado hacia abajo hasta llegar a 0.
2. **Columna I:** el otro factor, integrado hacia abajo, una vez por renglón.
3. **Flechas en diagonal:** cada renglón de D con el *siguiente* de I, con signos alternados $+,\,-,\,+,\ldots$
4. **Respuesta:** la suma de los productos de cada flecha, con su signo.



Leyendo las tres flechas, de arriba hacia abajo:

$$\int x^2\cos x\,dx = +\,x^2(\operatorname{sen} x) \;-\; 2x\,(-\cos x) \;+\; 2\,(-\operatorname{sen} x) + C = x^2\operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C.$$

¿Por qué funciona? Cada flecha es una ronda de la fórmula, y el signo se alterna por el menos de $-\int v\,du$. Se termina cuando la columna D llega a 0.

PARTE I · LAS TÉCNICAS

4 Sustitución trigonométrica

¿Cuándo se usa? Cuando aparece una raíz de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ o $\sqrt{x^2 - a^2}$, donde a es un número positivo.

La idea. Las raíces estorban. Si cambiamos x por un seno, una tangente o una secante, la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (o una de sus variantes) convierte lo que está bajo la raíz en un cuadrado perfecto, y la raíz *desaparece*. Solo hay que saber qué cambio usar en cada caso:

Si aparece	Cambio	Diferencial	Identidad que se usa	La raíz se vuelve
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\operatorname{sen}\theta$	$dx = a\cos\theta\, d\theta$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$	$a\cos\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan\theta$	$dx = a\sec^2\theta\, d\theta$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$a\sec\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$	$dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$	$a\tan\theta$

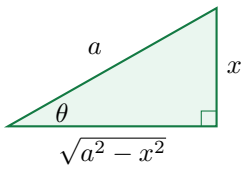
Por ejemplo, con $x = a\operatorname{sen}\theta$: $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\cos\theta$. La raíz ya no está.

Procedimiento

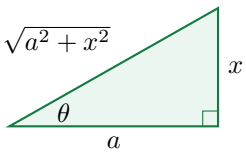
1. **Identifica el caso** y el valor de a (en $\sqrt{9 - x^2}$, $a = 3$).
2. **Calcula cada pieza por separado**: dx, la raíz y las demás x.
3. **Sustituye y simplifica.** Casi siempre queda algo de la tabla esencial.
4. **Regresa a** x: despeja θ de la sustitución o usa el triángulo.

El triángulo para regresar a x

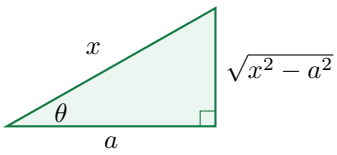
La sustitución dice cuánto vale una razón del ángulo θ; con ella se rotulan dos lados de un triángulo rectángulo y el tercero sale con Pitágoras. De ahí se lee cualquier otra razón en términos de x.



$x = a\operatorname{sen}\theta$: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{a}$



$x = a\tan\theta$: $\tan\theta = \dfrac{x}{a}$



$x = a\sec\theta$: $\sec\theta = \dfrac{x}{a}$

En integrales definidas es más fácil cambiar los límites a valores de θ: así no hace falta regresar a x (ejemplo 4.2).

Antes de usarla, revisa si basta una sustitución u. En $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ la derivada de $1 - x^2$ ya está afuera (salvo un número): con $u = 1 - x^2$ sale de inmediato, sin senos ni cosenos.

PARTE I · TÉCNICAS EXTRA PARA INTEGRALES DEFINIDAS

5 Técnicas extra: rey y paridad

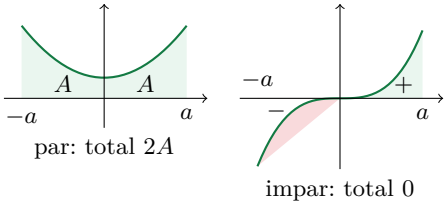
Estas dos técnicas **aparecerán pocas veces** en el examen. Son atajos que solo sirven para integrales *definidas*: en lugar de buscar una antiderivada, aprovechan una simetría.

A. Funciones pares e impares (*odd/even*): intervalos de la forma $[-a, a]$

Una función es **par** si al cambiar x por $-x$ no cambia: su gráfica es un espejo a ambos lados del eje y (como x^2 o $\cos x$). Las dos mitades del área son iguales.

Es **impar** si al cambiar x por $-x$ solo cambia de signo (como x, x^3 o $\operatorname{sen} x$). El área de la izquierda cancela la de la derecha.

Cómo saberlo: cambia x por $-x$. Si queda igual, es par; si queda con signo contrario, es impar. Además, impar $\times$ par $=$ impar.



par: total $2A$ — impar: total 0

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{si } f \text{ es par}, \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \quad \text{si } f \text{ es impar}.$$

Por ejemplo, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^3 + x^2\right)dx = 0 + 2\int_{0}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$: el sumando impar x^3 se elimina sin calcular nada.

B. La propiedad del rey (*King's property*): cambiar x por $a + b - x$

Si en una integral de a a b cambias *cada* x por $a+b-x$ (la suma de los límites menos x), el resultado no cambia. Es como ver la gráfica en un espejo colocado a la mitad del intervalo: la curva se voltea, pero el área es la misma.

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx.$$

Cómo se usa. Se llama I a la integral, se escribe también con el cambio y se *suman* las dos versiones: a la izquierda queda $2I$ y, a la derecha, muchas veces algo muy sencillo. Ejemplo: con $I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$, el cambio es $\frac{\pi}{2} - x$ y $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, así que $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$. Sumando:

$$2I = \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right) dx = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\pi}{4}.$$

Señal para intentarla: límites 0 y $\frac{\pi}{2}$ con senos y cosenos mezclados.

PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS DE LA TÉCNICA 1

1 Antiderivadas elementales

Ejemplo 1.1 · Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2}\,dx$ (dividir)

Paso 1. Dividir cada término entre x^2. No hay regla para cocientes, así que se separa la fracción:

$$\frac{x^2+1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1 + x^{-2}.$$

Paso 2. Integrar con la regla de la potencia. La integral de 1 es x, y $\int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$. La antiderivada es $F(x) = x - \frac{1}{x}$.

Paso 3. Evaluar: arriba menos abajo.

$$\Big[x - \frac{1}{x}\Big]_1^2 = \underbrace{\Big(2 - \frac{1}{2}\Big)}_{\text{en } x=2} - \underbrace{(1-1)}_{\text{en } x=1} = \frac{3}{2} - 0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2}\,dx = \frac{3}{2}}$$

Lección: un cociente «difícil» se volvió dos potencias sencillas al dividir.

Ejemplo 1.2 · Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ (racionalizar)

Paso 1. Racionalizar. Se multiplica arriba y abajo por el conjugado, $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$. Abajo queda una diferencia de cuadrados, y las raíces desaparecen:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(x+1)-x} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}.$$

Paso 2. Escribir como potencias: $(x+1)^{1/2} - x^{1/2}$.

Paso 3. Integrar con la regla de la potencia. Sumar 1 al exponente da $\frac{3}{2}$, y dividir entre $\frac{3}{2}$ es multiplicar por $\frac{2}{3}$. (Como la derivada de $x+1$ es 1, $(x+1)^{1/2}$ se integra igual que $x^{1/2}$.)

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C}$$

Lección: racionalizar convirtió una fracción con raíces en una resta de potencias.

PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS DE LA TÉCNICA 2

2 Sustitución u

Ejemplo 2.1 · Calcular $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

Paso 1. Elegir u. Lo de adentro de la raíz es x^2+1, y su derivada, $2x$, está afuera: $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$.

Paso 2. Reescribir todo en u. El $2x\,dx$ es justo du, y la raíz es $\sqrt{u} = u^{1/2}$:

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int u^{1/2}\,du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\,u^{3/2} + C.$$

Paso 3. Regresar a x.

$$\boxed{\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{2}{3}\,(x^2+1)^{3/2} + C}$$

Comprobación: al derivar, $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x = 2x\sqrt{x^2+1}$.

Ejemplo 2.2 · Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$

Paso 1. Elegir u. El denominador es $1+\operatorname{sen} x$ y su derivada, $\cos x$, está arriba: $u = 1+\operatorname{sen} x$, $du = \cos x\,dx$.

Paso 2. Cambiar los límites. Si $x = 0$, $u = 1+\operatorname{sen} 0 = 1$; si $x = \frac{\pi}{2}$, $u = 1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 2$.

Paso 3. Reescribir en u e integrar.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx = \int_1^2 \frac{du}{u} = \Big[\ln u\Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx = \ln 2}$$

Lección: es el patrón $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$. Al cambiar los límites no hubo que regresar a x.

PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS DE LA TÉCNICA 3

3 Integración por partes

Ejemplo 3.1 · Calcular $\int x\,e^x\,dx$

Paso 1. Elegir u con LIATE. x es algebraica y e^x exponencial; la A va antes que la E: $u = x$ y $dv = e^x dx$. Entonces $du = dx$ y $v = e^x$.

Paso 2. Aplicar la fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$:

$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C.$$

Paso 3. Factorizar. $\boxed{\int x\,e^x\,dx = e^x(x-1) + C}$

Lección: la nueva integral, $\int e^x dx$, fue más fácil que la original. Eso indica que la elección de u fue correcta.

Ejemplo 3.2 · Calcular $\int_1^e \ln x\,dx$ (un solo factor)

Paso 1. Elegir u y dv. Solo hay un factor: $u = \ln x$ y $dv = dx$. Entonces $du = \frac{1}{x}\,dx$ y $v = x$.

Paso 2. Aplicar la fórmula. El x y el $\frac{1}{x}$ se cancelan:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x.$$

Paso 3. Evaluar: arriba menos abajo, usando $\ln e = 1$ y $\ln 1 = 0$:

$$\Big[x\ln x - x\Big]_1^e = \underbrace{(e\cdot 1 - e)}_{\text{en } x=e} - \underbrace{(1\cdot 0 - 1)}_{\text{en } x=1} = 0 - (-1) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\int_1^e \ln x\,dx = 1}$$

Lección: cuidado con los signos al restar el paréntesis de abajo.

PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS DE LA TÉCNICA 4

4 Sustitución trigonométrica

Ejemplo 4.1 · Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Paso 1. Identificar el caso. Es $\sqrt{a^2-x^2}$ con $a=3$: se usa $x = 3\operatorname{sen}\theta$.

Paso 2. Calcular cada pieza por separado.

$$dx = 3\cos\theta\, d\theta, \qquad \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3\cos\theta.$$

Paso 3. Sustituir. El $3\cos\theta$ de arriba se cancela con el de abajo:

$$\int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{3\cos\theta} = \int d\theta = \theta + C.$$

Paso 4. Regresar a x. De $x = 3\operatorname{sen}\theta$ se despeja $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}$, es decir, $\theta = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3}$.

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3} + C}$$

Lección: la raíz desapareció y la integral quedó trivial. Es la versión, con $a=3$, de la esencial $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x$.

Ejemplo 4.2 · Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$

Paso 1. Identificar el caso. $(1+x^2)^{3/2} = \left(\sqrt{1+x^2}\right)^3$ es del tipo $\sqrt{a^2+x^2}$ con $a=1$: se usa $x = \tan\theta$.

Paso 2. Calcular cada pieza por separado.

- *Diferencial:* $dx = \sec^2\theta\, d\theta$.
- *Denominador:* $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$, así que $(1+x^2)^{3/2} = (\sec^2\theta)^{3/2} = \sec^3\theta$.
- *Límites:* si $x=0$, $\theta=0$; si $x=1$, $\tan\theta = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Paso 3. Sustituir y simplificar. Como $\frac{1}{\sec\theta} = \cos\theta$:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^3\theta} = \int_0^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta = \Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Lección: al cambiar los límites a θ no hizo falta regresar a x.

PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS DE LA TÉCNICA 5

5 Técnicas extra: paridad y propiedad del rey

Ejemplo 5.1 · Calcular $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3\cos x+3x^2)\,dx$ (paridad)

Paso 1. Reconocer la señal. El intervalo $[-2,2]$ es simétrico: antes de integrar, se revisa cada sumando cambiando x por $-x$.

Paso 2. Clasificar. $(-x)^3\cos(-x)=-x^3\cos x$: es **impar**. $3(-x)^2=3x^2$: es **par**.

Paso 3. Eliminar el impar y duplicar el par.

$$\int_{-2}^{2}\big(x^3\cos x+3x^2\big)dx=0+2\int_{0}^{2}3x^2\,dx=2\Big[x^3\Big]_0^2=2\cdot 8 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{16}$$

Lección: integrar $x^3\cos x$ habría tomado varias rondas de partes; la paridad lo eliminó sin calcular nada.

Ejemplo 5.2 · Calcular $\displaystyle I=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^{2026}x}{\operatorname{sen}^{2026}x+\cos^{2026}x}\,dx$ (propiedad del rey)

Paso 1. No asustarse. Se ve imposible, pero los límites son 0 y $\frac{\pi}{2}$ y hay senos y cosenos mezclados: es la señal de la propiedad del rey.

Paso 2. Aplicar el cambio $x\to\frac{\pi}{2}-x$. Como $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$ y $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\operatorname{sen}x$, senos y cosenos se intercambian:

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{2026}x}{\cos^{2026}x+\operatorname{sen}^{2026}x}\,dx.$$

Paso 3. Sumar las dos versiones de I. Tienen el mismo denominador, y los numeradores suman justo ese denominador:

$$2I=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^{2026}x+\cos^{2026}x}{\operatorname{sen}^{2026}x+\cos^{2026}x}\,dx=\int_0^{\pi/2}1\,dx=\frac{\pi}{2} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{I=\frac{\pi}{4}}$$

Lección: el 2026 no importó; con cualquier exponente el resultado es $\frac{\pi}{4}$. Una integral que asusta puede ser de las más fáciles.

PARTE III · PARA PREPARARTE

6 Recomendaciones

Integrar se aprende practicando. La rapidez no viene de escribir más de prisa, sino de *reconocer* qué técnica pide cada integral, y eso se entrena.

1. **Estudia por tu cuenta.** Esta guía explica la base de cada técnica; complementa con ejercicios del capítulo de «Técnicas de integración» de cualquier libro de cálculo (Stewart, Larson, Thomas o Zill), cursos o videos.
2. **Practica con variedad.** Primero varios ejercicios de cada técnica y después listas *mezcladas*, porque en la competencia nadie dice qué técnica usar.
3. **Memoriza lo esencial.** No necesitas tablas enormes: basta con las integrales esenciales de la página 2 (x^n, $\frac{1}{x}$, e^x, seno, coseno, $\sec^2 x$, …) y los tres cambios de la sustitución trigonométrica. Lo demás se deduce.
4. **Transforma la expresión antes de integrar.** Muchas integrales se resuelven modificándolas un poco: *dividir* o separar una fracción, expandir un producto, escribir raíces como potencias o *racionalizar* con el conjugado. Si una integral no se parece a nada conocido, pregúntate primero cómo reescribirla.
5. **Sigue una ruta de decisión.** Ante una integral nueva, hazte estas preguntas en orden:

1.	¿Se puede dividir, separar o racionalizar para llegar a las esenciales?	⟶	antiderivadas elementales
2.	¿Aparece una función junto con su derivada?	⟶	sustitución u
3.	¿Es un producto de funciones de distinto tipo, o un $\ln x$ solo?	⟶	integración por partes
4.	¿Hay una raíz como $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ o $\sqrt{x^2-a^2}$?	⟶	sustitución trigonométrica
5.	¿Es definida, con intervalo $[-a,a]$ o límites 0 y $\frac{\pi}{2}$?	⟶	paridad o propiedad del rey

6. **Verifica tus respuestas.** Derivar el resultado toma segundos y detecta casi cualquier error.
7. **Cuida los detalles.** El valor absoluto en los logaritmos, el signo menos de la integración por partes y el cambio de límites al sustituir. En la competencia *no es necesario* escribir la constante $+C$ (tampoco se penaliza).
8. **Si te atoras, cambia de enfoque.** Regresa a la ruta de decisión y prueba otra técnica o otra forma de reescribir la integral.
9. **Disfruta.** Una integral es, ante todo, un buen acertijo.

Que no te intimiden. Algunas integrales pueden verse difíciles a primera vista, pero el nivel del Quetzal Integrador está pensado para que todos puedan participar satisfactoriamente. El objetivo de la competencia es el aprendizaje: si estudias esta guía, estás listo para competir.

Las reglas y el formato de la competencia se detallan en el documento *Especificaciones de la competencia*.

¡Mucho éxito y a disfrutar aprendiendo!